

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ЭНТРОПИЙНЫХ МОДЕЛЕЙ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Received 25 November 2011

© Khodusov V.D., Pignasty O.M., Gakh A.G., 2011

макроскопических величин технологического процесса и, что особенно важно, участвуют в формировании необратимого процесса. При изменении макроскопического состояния технологического процесса возникает переходной процесс, микропараметры предметов труда изменяются [1]. Через время, соответствующее характерному масштабу времени  $\tau_{rel}$ , устанавливаются новые значения макропараметров технологического процесса. Среди множества технологических процессов можно выделить класс квазистатистических технологических процессов [1]. Время  $\tau_{tex}$ , за которое происходит значительное изменение макропараметров квазистатистических технологических процессов, много больше характерного времени производственного цикла [9], что дает возможность представить такой процесс как последовательность равновесных состояний макропараметров. Понятие квазистатистического технологического процесса является идеализацией. Для его точного осуществления потребовалось бы вести переход от одного равновесного состояния в другое достаточно медленно, что соответствует требованию малости параметра  $K_m = \tau_{rel} / \tau_{tex} \rightarrow 0$  [7]. Феноменологическое описание технологических процессов удастся провести последовательно только для квазистатистических процессов. Изменение состояния предметов труда может быть осуществлено вследствие совершения работы над ними.

Цель работы: теоретическое обоснование закона возрастания локальной энтропии технологического процесса, основанное на предметно-технологической модели воздействия оборудования на предмет труда.

### ЗАКОН ВОЗРАСТАНИЯ ЭНТРОПИИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

В качестве функции состояния технологического процесса можно ввести некоторую функцию, характеризующую меру его неопределенности [3, 4]. На важность применения энтропийных методов в процессах управления большими системами указал Дж. Фон Нейман [11]. Энтропийный подход в описании технологических процессов детально рассмотрен Б.Н.Петровым [1]. Известно [3,4], что энтропия технологического процесса, может быть записана через функцию распределения предметов труда по микросостояниям  $\chi(t, S, \mu)$ :

$$H_{\Omega}(t, S) = \int_0^{\infty} \chi(t, S, \mu) \cdot \ln \left( \frac{e}{\chi(t, S, \mu)} \right) d\mu, \quad (1)$$

где  $S$  и  $\mu$  соответственно усредненные по бесконечно малой ячейке фазового технологического пространства  $\Delta\Omega$  характеристики состояния предметов труда, представляющие затраты, перенесенные на предмет труда и интенсивность переноса технологических ресурсов на них.

Функция распределения предметов труда по микросостояниям определяется кинетическим уравнением технологического процесса [7]

$$\frac{\partial \chi(t, S, \mu)}{\partial t} + \frac{\partial \chi(t, S, \mu)}{\partial S} \mu + \frac{\partial \chi(t, S, \mu)}{\partial \mu} f(t, S) = \lambda(t, S) \cdot \left\{ \int_0^{\infty} \psi(t, S, \tilde{\mu}) \cdot \tilde{\mu} \cdot \chi(t, S, \tilde{\mu}) d\tilde{\mu} - \mu \cdot \chi(t, S, \mu) \right\}, \quad (2)$$

$$\chi(t, S, 0) = 0, \quad \chi(t, S, \infty) \rightarrow 0.$$

Производственная функция обобщенной единицы технологического оборудования  $f(t, S)$  задается способом производства. Оборудование воздействует на предмет труда, изменяя его качественно и количественно. Учитывает вероятностный характер воздействия технологического оборудования на предмет труда функция  $\psi(t, S, \mu)$ , определяющая вероятность того, что после воздействия технологического оборудования на предмет труда скорость переноса затрат станет равной  $\mu$ . Определим моменты  $[\psi]_k(t, S)$  и  $[\chi]_k(t, S)$  функции  $\psi(t, S, \mu)$  и  $\chi(t, S, \mu)$  следующими выражениями:

$$\int_0^{\infty} \psi(t, S, \mu) d\mu = 1, \quad \int_0^{\infty} \mu^k \cdot \psi(t, S, \mu) d\mu = [\psi]_k(t, S), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

$$\int_0^{\infty} \chi(t, S, \mu) d\mu = [\chi]_0(t, S), \quad \int_0^{\infty} \mu^k \cdot \chi(t, S, \mu) d\mu = [\chi]_k(t, S). \quad (4)$$

Если функция  $\psi(t, S, \mu)$  не зависит от состояния предметов труда до испытания воздействия со стороны технологического оборудования, то уравнение (2) примет вид:

$$\frac{\partial \chi(t, S, \mu)}{\partial t} + \frac{\partial \chi(t, S, \mu)}{\partial S} \mu + \frac{\partial \chi(t, S, \mu)}{\partial \mu} \cdot f(t, S) = \lambda(t, S) \cdot \{ \psi(t, S, \mu) \cdot [\chi]_1(t, S) - \mu \cdot \chi(t, S, \mu) \}. \quad (5)$$

Используя (5), изменение энтропии технологического процесса со временем может быть определено

$$\frac{dH_{\Omega}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} \chi(t, S, \mu) \cdot \ln \left( \frac{e}{\chi(t, S, \mu)} \right) d\mu = - \int_0^{\infty} \lambda(t, S) \cdot \{ \psi(t, S, \mu) \cdot [\chi]_1(t, S) - \mu \cdot \chi(t, S, \mu) \} \cdot \ln \chi(t, S, \mu) d\mu. \quad (6)$$

Состояние статистического равновесия полностью симметрично относительно замены будущего настоящим. При изменении знака времени надо переставить состояния до воздействия и после воздействия технологического оборудования на предмет труда. Мы можем, следовательно, утверждать, что в состоянии статистического равновесия число взаимодействий продуктов труда с технологическим оборудованием  $\mu \cdot \chi(t, S, \mu)$  при переходе в состояние  $\psi(t, S, \mu) \cdot [\chi]_1(t, S)$  (прямой процесс) равно числу взаимодействий предметов с технологическим оборудованием  $\psi^*(t, S, \mu^*) \cdot [\chi]^*_1(t, S)$  при переходе в состояние  $\mu^* \cdot \chi^*(t, S, \mu^*)$  (обратный процесс). Правую часть уравнения (6), которая описывает прямой процесс при переходе предмета труда в состояние  $\psi(t, S, \mu) \cdot [\chi]_1(t, S)$ , обозначим  $J_{pr}(t, S)$ . Если провести замену  $\mu \cdot \chi(t, S, \mu)$  на  $\mu^* \cdot \chi^*(t, S, \mu^*)$  и  $\psi(t, S, \mu) \cdot [\chi]_1(t, S)$  на  $\psi^*(t, S, \mu^*) \cdot [\chi]^*_1(t, S)$ , то для обратного процесса можно записать

$$J_{obr}(t, S) = - \int_0^{\infty} \lambda(t, S) \cdot \{ \psi^*(t, S, \mu^*) \cdot [\chi]^*_1(t, S) - \mu^* \cdot \chi^*(t, S, \mu^*) \} \cdot \ln \left( \frac{\psi^*(t, S, \mu^*) \cdot [\chi]^*_1(t, S)}{\mu^*} \right) d\mu. \quad (7)$$

Теперь правую часть уравнения (6) можно представить в следующем виде:

$$J(t, S) = \frac{J_{pr}(t, S) + J_{obr}(t, S)}{2} = - \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\infty} \lambda(t, S) \cdot \{ \psi(t, S, \mu) \cdot [\chi]_1(t, S) - \mu \cdot \chi(t, S, \mu) \} \cdot \ln \chi(t, S, \mu) d\mu - \\ - \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\infty} \lambda(t, S) \cdot \{ \psi^*(t, S, \mu^*) \cdot [\chi]^*_1(t, S) - \mu^* \cdot \chi^*(t, S, \mu^*) \} \cdot \ln \left( \frac{\psi^*(t, S, \mu^*) \cdot [\chi]^*_1(t, S)}{\mu^*} \right) d\mu. \quad (8)$$

Используя соотношения

$$\mu^* = -\mu, \quad \chi^*(t, S, \mu^*) = \chi(t, S, \mu), \quad [\chi]^*_1(t, S) = -[\chi]_1(t, S), \quad \psi^*(t, S, \mu^*) = \psi(t, S, \mu). \quad (9)$$

интеграл (6) может быть записан окончательно в виде:

$$\frac{dH_{\Omega}(t, S)}{dt} = - \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\infty} \lambda(t, S) \psi(t, S, \mu) \cdot [\chi]_1(t, S) \left\{ 1 - \frac{\mu \cdot \chi(t, S, \mu)}{\psi(t, S, \mu) \cdot [\chi]_1(t, S)} \right\} \cdot \ln \frac{\chi(t, S, \mu) \cdot \mu}{\psi(t, S, \mu) \cdot [\chi]_1(t, S)} d\mu \geq 0. \quad (10)$$

Подынтегральное выражение, а, следовательно, и весь интеграл положителен. Действительно, величина  $\lambda(t, S) \cdot \psi(t, S, \mu) \cdot [\chi]_1(t, S)$  положительна по определению. Функция же вида  $(1-y) \cdot \ln y$  отрицательна при всех  $y > 0$ , поскольку  $\ln y > 0$  при  $y > 1$  и  $\ln y < 0$  при  $y < 1$ . Таким образом, мы приходим к закону возрастания энтропии для технологического процесса. Равенство выполняется только для квазистатистических процессов, когда макропараметры технологического процесса находятся в состоянии установившегося равновесия:

$$\frac{dH_{\Omega}(t, S)}{dt} = 0. \quad (11)$$

### НЕОБРАТИМОСТЬ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

Средние значения параметров технологического процесса, определяемые через функцию распределения предметов труда по микросостояния  $\chi(t, S, \mu)$  [1, 5, 7] могут быть определены как для равновесного состояния, так и для неравновесного состояния технологического процесса. Функция распределения  $\chi(t, S, \mu)$  характеризует степень неполноты задания микросостояний ансамбля предметов труда. При этом возможно выделить два предельных случая:

А) технологический процесс находится в равновесном состоянии с заданными межоперационными заделами и темпом выпуска продукции. Состояние предметов труда определяется набором параметров технологического оборудования и параметрами системы управления запасами предприятия. Число задаваемых параметров технологического процесса много меньше полного числа степеней свободы предметов труда, находящихся в технологическом процессе (для технологического процесса с N-предметов труда число степеней свободы производственно-технической системы равно  $2 \cdot N$ );

Б) предполагается, что в начальный момент функционирования технологического процесса известны для каждого предмета труда координата  $S$  и  $\mu$  в фазовом технологическом пространстве  $(S, \mu)$ . В этом случае из уравнений Эйлера

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial I(t, S_i, \mu_i)}{\partial \dot{S}_i} = \frac{\partial I(t, S_i, \mu_i)}{\partial S_i}, i=1..N. \quad (12)$$

описывающего перемещение предмета труда вдоль технологического маршрута производственно-технической системы с целевой функцией  $I(t, S, \mu)$ , можно однозначно найти значения координат  $S$  и  $\mu$  в произвольный момент времени. Функция распределения предметов труда по микросостояниям  $\chi(t, S, \mu)$  для технологического процесса представима в виде

$$\chi(t, S, \mu) = \sum_{j=1}^N \delta_j(S_j - S_j(S_{j0}, t - t_0)). \quad (13)$$

Первый случай соответствует максимальной неопределенности состояния предметов труда, а второй случай - полному динамическому описанию изменения параметров состояния предметов труда технологического процесса, при котором неопределенность состояния предметов труда равна нулю. Между этими предельными случаями есть огромное множество различных вариантов функционирования технологического процесса, соответствующих той или иной степени неопределенности его состояния. Для неравновесных технологических процессов различные степени неопределенности производственно-технической системы соответствуют различным стадиям релаксационных процессов. Производственная практика показывает, что релаксационные технологические процессы являются необратимыми. В то же время исходные уравнения Эйлера (12) являются обратимыми. Формально это проявляется в том, что уравнения Эйлера остаются неизменными при замене

$$t \rightarrow -t, \mu_j \rightarrow -\mu_j, (j = 1, 2, \dots, N). \quad (14)$$

Вопрос о том, на какой стадии и по каким причинам исходные уравнения Эйлера (12) заменяются необратимыми уравнениями, является одним из важных вопросов, возникающих при исследовании социально-экономических и производственно-технических систем.

Основным фактором, приводящим к необратимости, является неустойчивость (расходимость) технологических траекторий предметов труда [7]. При точном задании начальных условий  $S_j(t_0)$  в момент времени  $t_0$  можно однозначно предсказать состояние предмета труда  $S_j(t)$  в произвольный момент времени  $t$ . При задании начальных условий для предметов труда  $S_j(t_0)$  с небольшой погрешностью  $\Delta S_j(t_0)$  возможны следующие ситуации:

а) расхождение траектории  $\Delta S_j(t)$  с начальными условиями  $\Delta S_j(t_0)$  в любой последующий момент времени  $t$  остается малым  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta S_j(t) \rightarrow 0$ ;

б) расхождение траекторий  $\Delta S_j(t)$  становится сколь угодно большим  $\left| \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta S_j(t) \right| \rightarrow \infty$ .

В последнем случае говорят о неустойчивости поведения микропараметров предметов труда. Можно утверждать, что в фазовом технологическом пространстве  $(S, \mu)$  происходит перемешивание фазовых технологических траекторий. Если расходимость траекторий происходит по экспоненциальному закону, то имеет место стохастизация. Последнее означает, что с точки зрения динамической теории траектории движения предметов труда в фазовом технологическом пространстве  $(S, \mu)$  становятся непредсказуемыми. Вследствие непредсказуемости технологической траектории предмета труда становится возможным лишь статистическое предсказание наиболее вероятного поведения средних характеристик технологического процесса.

Впервые на роль неустойчивости движения и фактора перемешивания в возникновении необратимости явлений указал Н.С. Крылов. Для оценки меры неустойчивости динамической системы из  $N$ -объектов А.Н. Колмогоров ввел специальную характеристику, получившую название энтропии Крылова-Колмогорова или К-энтропии. Для технологического процесса К-энтропия определяется формулой

$$k(t) = \frac{1}{t} \cdot \ln \left( \sqrt{\sum_{j=1}^N (\Delta S_j(t))^2} / \sqrt{\sum_{j=1}^N (\Delta S_j(0))^2} \right), (j = 1, 2, \dots, N). \quad (15)$$

Если движение предметов труда по технологическому маршруту является асимптотически устойчивым, то  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta S_j(t) \rightarrow 0$  и  $\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) \rightarrow 0$ .

Таким образом, необратимость явлений при движении предметов труда по технологическому маршруту заключается во взаимодействии предметов труда с технологическим оборудованием. Траектории движения предметов труда в фазовом технологическом пространстве  $(S, \mu)$  после взаимодействия с технологическим оборудованием оказываются непредсказуемыми. Становится возможным лишь статистическое предсказание.

При этом важным является нахождение наиболее вероятных значений параметров технологического процесса.

### УСЛОВИЯ ЭНТРОПИЙНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПАРАМЕТРОВ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

Одним из основных вопросов при построении моделей технологических процессов является вопрос устойчивости. Хорошо известно, что влияние малых возмущающих факторов на поведение производственно-технической системы будет не одинаковым для различных технологических процессов. На одних технологических процессах это влияние незначительно, так как возмущенное состояние мало отличается от невозмущенного. Напротив, на других технологических процессах влияние возмущений сказывается весьма значительно, как бы ни были малы возмущающие воздействия. Так как возмущающие факторы всегда существуют неизбежно, то становится понятным, что задача устойчивости технологического процесса приобретает очень важное теоретическое и практическое значение.

Если для дифференциального уравнения (описывающего поведение состояний предметов труда рассматриваемого технологического процесса) (5) в малых возмущениях  $\xi = S - S_0$  в окрестности невозмущенного состояния  $S_0$  можно найти знакоопределенную функцию  $V(t, \xi) \geq 0$ , полная производная которой по времени  $\frac{dV(t, \xi)}{dt} \leq 0$  есть функция также знакоопределенная, знака, противоположного с  $V(t, S)$ , то невозмущенное движение устойчиво асимптотически [10, с.36]. Причем знаки равенства возможны только при  $\xi = 0$ .

Примем в качестве функции Ляпунова  $V(t, \xi)$  разность между значениями энтропии технологического процесса в невозмущенном  $H_\Omega(t, S_0)|_0$  и возмущенном  $H_\Omega(t, S)$  состояниях [11]:

$$V(t, \xi) = -(H_\Omega(t, S) - H_\Omega(t, S_0)|_0), \quad \xi = S - S_0, \quad \frac{dV(t, \xi)}{dt} = -\frac{dH_\Omega(t, S)}{dt} \leq 0, \quad (16)$$

где  $H_\Omega(t, S_0)|_0$  - значение энтропии технологического процесса в невозмущенном состоянии, обозначенном символом  $|_0$ .

Следует заметить, что функция Ляпунова  $V(t, \xi)$  (16) выражается через функцию распределения [11, с.166] предметов труда по микросостояниям  $\chi(t, S, \mu)$ . Функция Ляпунова (16) достигает минимума, если выполняется условие

$$\psi(t, S, \mu) \cdot [\chi]_1(t, S) - \mu \cdot \chi(t, S, \mu) = 0, \quad (17)$$

определяющее равновесную функцию распределения предметов труда по микросостояниям в ходе их движения по технологическому маршруту

$$\chi(t, S, \mu)|_0 = [\chi]_1(t, S) \cdot \frac{\psi(t, S, \mu)|_0}{\mu}, \quad (18)$$

при котором кинетическое уравнение (5) принимает вид

$$\frac{\partial \chi(t, S, \mu)}{\partial t} + \frac{\partial \chi(t, S, \mu)}{\partial S} \cdot \mu + \frac{\partial \chi(t, S, \mu)}{\partial \mu} \cdot f(t, S) = 0. \quad (19)$$

Условие (17) допускает простую интерпретацию в терминах инвариантов воздействия технологического оборудования на предмет труда. Сохраняется количество предметов труда в ходе стохастического воздействия технологического оборудования на предмет труда.

Исследование на устойчивость параметров технологического процесса свелось к определению условия знакоопределенности функции  $V(t, \xi)$

$$V(t, \xi) = - \left( H_\Omega(t, S_0)|_0 + \frac{\partial H_\Omega(t, S)}{\partial S} \Big|_0 \cdot \xi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_\Omega(t, S)}{\partial S^2} \Big|_0 \cdot \xi^2 + \dots - H_\Omega(t, S_0)|_0 \right). \quad (20)$$

В силу того, что в состоянии статистического равновесия (11) линейные слагаемые равны нулю, форма (20) принимает вид

$$V(t, \xi) = - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_\Omega(t, S)}{\partial S^2} \Big|_0 \cdot \xi^2. \quad (21)$$

Откуда условия энтропийной устойчивости параметров технологического процесса

$$\left. \frac{\partial^2 H_{\Omega}(t, S)}{\partial S^2} \right|_0 < 0, \quad (22)$$

которое определяет параметры потока энтропии вдоль технологического маршрута для невозмущенного состояния макропараметров технологического процесса. Используя известный вид функции  $\psi(t, S, \mu)$ , который определяется проектными данными технологического процесса и используемого оборудования, неравенство (21) может быть выражено через макропараметры технологического процесса [2, 7].

### ВЫВОДЫ

В статье рассматривается энтропийный подход к исследованию технологического процесса производственно-технической системы. Воспользовавшись понятием энтропии технологического процесса [1], доказан закон возрастания энтропии для технологического процесса замкнутой производственно-технической системы. Постоянство энтропии характеризует квазистатистические технологические процессы, являющиеся идеализацией реальных технологических процессов производственно-технических систем. Получены условия энтропийной устойчивости макропараметров технологического процесса. Основным теоретическим результатом является вывод закона возрастания энтропии технологического процесса исходя из предметно-технологической модели воздействия оборудования на предмет труда.

Перспективным является построение методики исследования устойчивости макропараметров технологического процесса, с использованием энтропии, характеризующей его состояние. Это даст возможность использовать эту методику для исследования функционирования макропараметров технологического процесса в реальных производственных структурах.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Petrov B.N., Ulanov G.M., Gol'denblat I.I., Ul'janov S.V. Teorii modelej v processakh upravlenija (Informacionnyj i termodinamicheskij aspekty). - M.: Nauka, 1978. - 224s.
2. Forrester Dzh. Osnovy kibernetiki predpriyatija. - M.: Progress, 1961. - 341 s.
3. Vil'son A.Dzh. Ehntropijnye metody modelirovanija slozhnykh sistem: Per.s angl. - M.: Nauka, 1978. - 248s.
4. Prangishvili I.V. Ehntropijnye i drugie sistemnye zakonomernosti: Voprosy upravlenija slozhnymi sistemami / In-t problem upravlenija im. V.A. Trapeznikova. - M.: Nauka, 2003. - 428 s.
5. Vlasov V.A., Tikhomirov I.A., Loktev I.I. Modelirovanie tekhnologicheskikh processov izgotovlenija promyshlennoj produkcii. - Izd. Tomskogo politekhnicheskogo universiteta, 2006. - 300 s.
6. Jakimovich S.B. Postanovka i reshenie zadachi sinteza i optimal'nogo upravlenija tekhnologicheskimi processami lesozagotovok // Lesnoj vestnik. - 2003. - №3. - S.96-103.
7. Pignastyj O.M. Statisticheskaja teorija proizvodstvennykh sistem. - Kh.: Izd. KhNU im. V.N. Karazina, 2007. - 388 s.
8. Leonte'v V.V. Issledovaniya struktury amerikanskoj ehkonomiki. - M.: Gosudarstvennoe statisticheskoe izdatel'stvo, 1958. - 640 s.
9. Pignastyj O.M., Khodusov V.D. Raschet proizvodstvennogo cikla s primeneniem statisticheskoy teorii proizvodstvenno-tekhnicheskikh sistem // Dopovidi Nacional'noi akademii nauk Ukraini. - 2009. - №12 - S.38-44.
10. Malkin I.G. Teoriya ustojchivosti dvizheniya. - M.: Nauka, 1966. - 531 s.
11. Prigozhin I. Ot suschestvujushchego k vznikayushemu: Vremja i slozhnost' v fizicheskikh naukakh. - M.: Nauka, 1985. - 328s.